2.2. Қатты дененің қарапайым қозғалыстары
2.2.1. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы

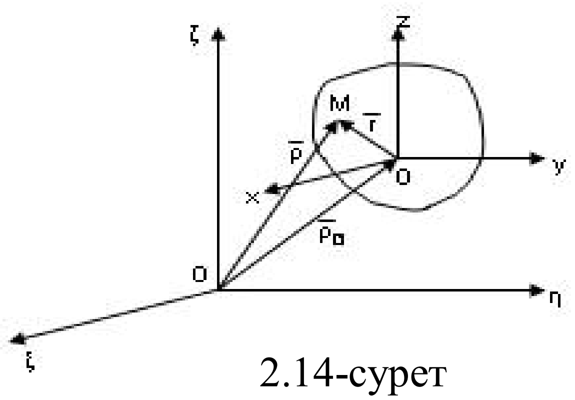
Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы деп оның әрбір екі нүктесін қосатын түзулердің кез келген өзіне-өзі тек параллель қозғалатындай қозғалыс түрін айтамыз. Демек ілгерілемелі қозғалыстағы дене бойынан алған кез келген түзу өзінің бастапқы бағытын өзгертпей сақтайды. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы оның бір нүктесінің қозғалысымен толық сипатталады. Үш өлшемді кеңістікте ілгерілемелі қозғалыстағы дененің еркіндік дәреже саны үшке тең. Оның қозғалысын үш тәуелсіз координаталық түрдегі қозғалыс теңдеулерімен жазуға болады

$$x_M = x(t); \quad y_M = y(t); \quad z_M = z(t)$$

мұндағы М – дененің кез-келген нүктесі.

Қозғалмайтын $O_1\xi\eta\zeta$ өстер жүйесіне қатысты ілгерілмелі қозғалыс жасайтын қатты дене *Д* берілсін. Оның кез келген бір нүктесі *О*-ны полюс ретінде қабылдап, денеге өзгерместей етіп бекітілген қозғалмалы координаттар жүйесін алайық.

Бұл қозғалмалы жүйенің өстерін негізгі жүйе өстеріне параллель бағыттаймыз (2.14-сурет). Таңдап алынған *О*-бас нүктенің қозғалмайтын $O_1\xi\eta\zeta$ жүйесімен салыстырғандағы кеңістіктегі орны $\bar{\rho}_0 = \overline{O_1O}$ радиус-векторымен, ал дененің кез келген *М* нүктесінің қозғалмалы *Oxyz* жүйесімен салыстырғандағы орны $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус – векторымен анықталады. Дене абсолют қатты және тек қана ілгерілемелі қозғалыста болғандықтан $\bar{r}$ радиус-вектор шамасы жағынан да, бағыты жағынан да тұрақты болады, яғни оның осы координаттар өстеріне проекциялары *а, в, с* тұрақты сандар болады. Суреттегі O_1OM векторлық үшбұрыштан, *М* нүктесінің $O_1\xi\eta\zeta$ жүйесіндегі орнын анықтайтын радиус-вектор $\bar{\rho}$-ның өрнегін табамыз:



2.14-сурет

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r} \qquad (2.59)$$

мұндағы $\bar{r}$ = const.

Әртүрлі уақыт мезгіліндегі сәйкес нүктелерінің арасын қосатын кесінділер, мысалы *ОМ* кесіндісі, өзара параллель және тең болатын қисықтар (траекториялар) эквидистанттық немесе конгруэнтті қисықтар (траекториялар) деп аталады. Ілгерілемелі қозғалыстағы дене нүктелерінің траекториялары кез келген эквидистанттық қисық сызықтар болады.

Дененің (2.43) қозғалыс теңдеуінің екі жағынан да уақыт бойынша туынды аламыз. Сонда:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d\overline{\rho}_0}{dt},$$

немесе

$$\overline{v}_M = \overline{v}_0 \qquad (2.60)$$

яғни, ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің берілген бір уақыт мезгілігіндегі жылдамдықтары өзара тең болады.

Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысын кез келген уақыт мезгілінде дененің барлық нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең болатын қозғалыс деп те атайды. Мұндай қозғалысты пермаменттік (тұрақты) ілгерілемелі қозғалыс деп атаймыз.

Дененің үдеу векторларының орналасуын анықтау үшін (2.60) –теңдіктен уақыт бойынша туынды ала аламыз:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_0$$

яғни, *пармаменттік ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт мезгіліндегі үдеулері өзара тең.*

Сонымен, пармаменттік ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт мезгіліндегі сәйкес кинематикалық сипаттамалары бірдей, яғни олардың біреуінің ғана, мысалы O нүктесінің қозғалысын зерттеп білсек болғаны.

2.2.2. Қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысы

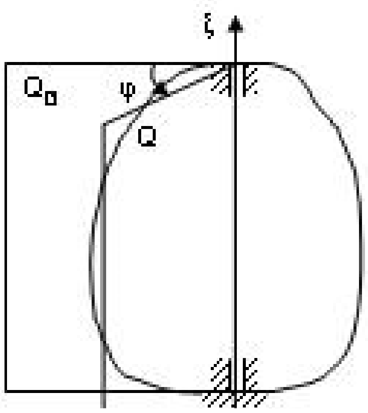
Қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын дене деп, екі нүктесі қозғалмайтын денені айтамыз. Қозғалмайтын нүктелерді қосатын түзу оның айналу өсі болады.

Қозғалмайтын Q_o және Q жазықтықтарының арасындағы екі жақты бұрыш φ қатты дененің айналу бұрышы деп аталады. Бұл бұрыш берілген дененің кез келген уақыт мезгіліндегі орнын бірмәнді анықтайды. Демек, қозғалмайтын өсті айналатын қатты дененің бір ғана еркіндік дәрежесі болады. Дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі орны бір параметрмен анықталады. Мұндай параметр ролін φ бұрышы атқарады. Ол уақыттың бірмәнді функциясы болып келеді.

$$\varphi = \varphi(t). \qquad (2.61)$$

Бұл (2.61) теңдеуі қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі деп аталады.

Айналу бұрышы $\varphi -$дің таңбасын анықтауда оң бұранда ережесіне сүйенеміз. Егер φ бұрышы, айналу өсі $O\zeta\,(Oz)$-оң ұшынан қарағанда қозғалмайтын Q_0 жарты жазықтықтан Q жарты жазықтыққа қарай сағат тілінің қозғалысына қарсы бағытта саналатын болса, айналу бұрышын оң таңбалы деп санаймыз. Ал егер ол кері бағытпен анықталса оны “-” таңбамен алуымыз керек. Айналу бұрышы үнемі радианмен өлшенеді.



2.15-сурет

Дененің қозғалмайтын өсті айналуын сипаттауға қажетті екінші бір кинематикалық шаманы бұрыштық жылдамдық деп атайды. Оның алгебралық шамасы ω әрпімен белгіленеді. Бұрыштық жылдамдық ω дененің айналу бұрышы φ-дің уақыттың өтуіне қарай өзгеру тездігін белгілейтін шама. Алдымен белгілі бір уақыт аралығына сәйкес келетін айналу бұрышының өзгеруін қарастырайық. Егер оның t уақытына сәйкес мәні $\varphi(t)$ –болсын, ал уақыттың $t_1 = t + \Delta t$ мезгіліндегі мәні $\varphi(t+\Delta t)$ болсын. Демек Δt уақыт аралығында дене $\Delta\varphi$ бұрышына айналыс жасайды:

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) \tag{2.62}$$

осындағы айналу бұрышының өсімшесі (2.62)-нің оған сәйкес келетін уақыт өсімшесі Δt -ға қатынасын құрайық та, оны $\omega_{орт}$ деп белгілейік:

$$\omega_{орт} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.63}$$

$\omega_{орт}$ орташа бұрыштық жылдамдығы деп атайды. (2.63)-тің екі жағында $\Delta t \to 0$ кездегі шегі:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \omega_{орт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{орт} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.64}$$

(2.64)-тің оң жағындағы шек $\varphi(t)$ функциясының туындысын береді.

Ал оның сол жағындағы шек дененің берілген t уақыт мезгіліндегі бұрыштық жылдамдығы ω-ны береді. Осы түсіндірмелерді қабылдап (2.64) теңдігін мына түрде жазамыз:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.65}$$

Бұрыштық жылдамдық векторлық шама. $\overline{\omega} -$ векторы дененің айналу өсінің бойында орналасып, оң бұранда ережесіне сәйкес келетін бағытпен бағытталады.

Жоғарыда айтылған φ бұрышын санаудың оң бағыты жөніндегі анықтаманы ескере отырып, бұрыштық жылдамдық векторын мынадай формуламен өрнектеуге болады:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\overline{k} = \omega\overline{k}, \tag{2.66}$$

мұндағы $\overline{k}$, Oz өсінің бірлік векторы.

Дененің айналмалы қозғалысын сипаттаушы үшінші кинематикалық шама, бұрыштық үдеу ұғымына тоқтап өтейік. Алдымен орташа бұрыштық үдеуді анықтаймыз. Берілген t уақыт мезгіліндегі айналмалы қозғалыстың бұрыштық жылдамдығы $\omega(t)$ болсын, ал $t+\Delta t$ уақыт мезгілінде ол $\omega(t+\Delta t)$ болсын дейік. Сонда Δt уақыт аралығында бұрыштық жылдамдық өсімшесі мынаған тең болады:

$$\Delta\omega = \omega(t + \Delta t) - \omega(t). \tag{2.67}$$

Осы шамалар қатынасын дененің Δt уақыты аралығындағы орташа бұрыштық үдеу деп атап, оны $\varepsilon_{орт}$ әрпімен белгілейміз:

$$\varepsilon_{орт} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{2.68}$$

Бұл қатынасты пайдалана отырып, дененің берілген уақыт t мезгіліндегі, яғни лездік бұрыштық үдеудің анықтамасын бере аламыз.

Берілген уақыттағы бұрыштық үдеу деп орташа бұрыштық үдеудің $\Delta t \to 0$ кездегі үдеудің шегін айтамыз. Бұрыштық үдеуді ε-деп белгілесек, айтылған анықтама мына формуламен беріледі:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{орт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (2.69)$$

(2.69) –теңдіктің оң жағында $\omega(t)$ функциясының уақыт бойынша алынған туындысы тұрғанын ескерсек, оны мына түрде қайталап жаза аламыз:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ немесе } \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (2.70)$$

Бұрыштық үдеу бұрыштық жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең, немесе φ айналу бұрышынан уақыт бойынша алынған екінші туындыға тең болатын шама. Бұрыштық үдеу векторы $\bar{\varepsilon}$ де айналу өсінің бойында орналасады. Бұрыштық үдеу векторын мынадай формуламен өрнектеуге болады:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\bar{k} \text{ немесе } \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\bar{k}. \qquad (2.71)$$

Бір қалыпты айналмалы және бір қалыпты айнымалы айналмалы қозғалыстар. Егер қозғалыс кезінде бұрыштық үдеу $\varepsilon = 0$ болса, онда қозғалыс $\omega = \text{const}$ тұрақты бұрыштық жылдамдықпен орындалады. Мұндай қозғалысты бір қалыпты айналмалы қозғалыс деп атаймыз. Осындай қозғалыстың бұрыштық жылдамдығының анықтамасынан мынадай өрнек алынады:

$$d\varphi = \omega dt.$$

Егер $t_0 = 0$ болғанда $\varphi = \varphi_0$ десек, соңғы теңдіктен мынадай формула шығады:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (2.72)$$

мұндағы бастапқы $\varphi_0 = 0$ болып келген жағдайда (2.72) –теңдіктен:

$$\varphi = \omega t \text{ және } \omega = \frac{\varphi}{t}. \qquad (2.73)$$

Дененің айналысы кезінде оның бұрыштық үдеуі ε түрақты болатын болса, онда мұндай айналмалы қозғалысты бір қалыпты айнымалы дейміз.

Бұрыштық үдеу анықтамасынан:

$$d\omega = \varepsilon dt.$$

Бұл теңдікті сәйкес алынған шектерде (t_0= 0 саналады) интегралдау арқылы, мынадай формула аламыз:

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0. \qquad (2.74)$$

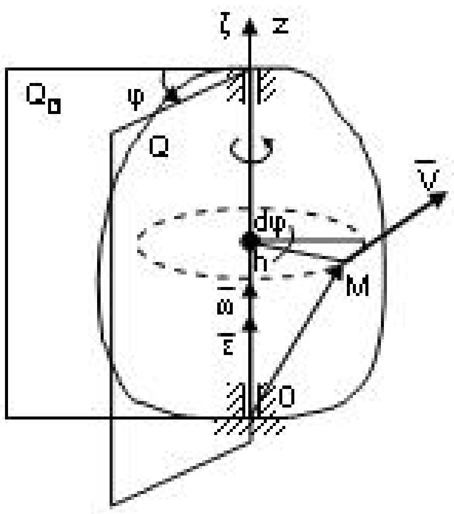
Бұл формуламен ε = const болған жағдайдағы бұрыштық жылдамдық анықталады. (2.74) –тің екі жағында dt-ға көбейтіп интегралдау арқылы мынадай формула аламыз:

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0. \qquad (2.75)$$

2.2.3. Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары және үдеулері

Қозғалмайтын өсті айналатын қатты дене нүктелерінің қозғалысын қарастырайық. Мұнадай дененің барлық нүктелерінің қозғалыс кезіндегі траекториялары, жазықтықтары айналу өсіне перпендикуляр, ал центрлері айналу өсінде жататын, концентрлі шеңберлер болады. Дененің айналу өсінен h қашықтықта жатқан кез келген бір нүктесі M-ді алайық. Бұл нүктенің жылдамдығының шамасы:

$$v = \omega h, \tag{2.76}$$



2.16-сурет

формуласымен есептелінеді, ал $\bar{v}$ векторы, радиусы h, центрі O нүктесінде жататын шеңберге жанамамен, айналыс болатын жаққа қарай бағытталады (2.16-сурет).

(2.76)- шы формула нүкте M-нің жылдамдығын геометриялық әдіспен табуға мүмкіндік береді. Ал жылдамдықты векторлық тәсілді қолданып табуға да болады. Ол үшін берілген нүкте M-нің $Oxyz$ өстер жүйесіндегі $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус-векторын алайық. Осы $\bar{r}$ және $\bar{\omega}$ векторының векторлық көбейтіндісін құрайық: $\bar{\omega} \times \bar{r}$ (2.16 сурет).

Бұл көбейтіндінің модулі

$$|\bar{\omega} \times \bar{v}| = |\bar{\omega}||\bar{r}| \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega h. \tag{2.77}$$

(2.77)–теңдік, векторлық көбейтіндінің модулі, нүкте жылдамдығының (2.76) формуламен есептелінетін модуліне тең екенін көрсетеді. Осыдан соң $\bar{\omega} \times \bar{r}$ векторының бағытына тоқтайық. Бұл вектор, үшбұрыш ΔO_1MO жазықтығына M-нүктесіне тұрғызылған перпендикуляр бойыменен $\bar{v}$ векторымен бірдей бір жаққа қарай бағытталғанын 2.16-суреттен көруге болады. Сонымен бұл айтылғандардан, екі вектор, $\bar{\omega} \times \bar{r}$ және $\bar{v}$ бір-біріне тең екенін көреміз. Демек мынадай формуланың орынды екені дәлелденеді:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{2.78}$$

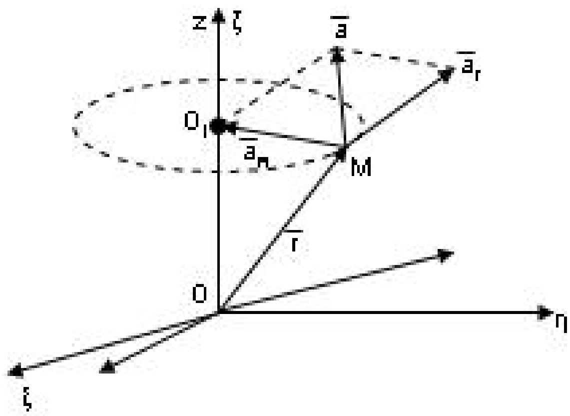
(2.78)–формула қатты дене кинематикасындағы маңызды формула. Бұл формула Эйлер формуласы деп аталады.

Дененің кез келген нүктесі М, радиусы $h = O_1M$ және жазықтығы айналу өсіне перпендикуляр орналасқан, шеңбер сыза отырып қозғалады дедік. Демек бұл нүктенің толық үдеуін екі құраушыға жіктеу арқылы анықтай аламыз (2.17-сурет). Шенбер бойымен қозғалған нүктенің жанама үдеуі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = h\frac{d\omega}{вe} = \varepsilon h, \qquad (2.79)$$

және оның нормаль үдеуі:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h. \qquad (2.80)$$



2.17-сурет

Егер дененің айналмалы қозғалысы үдемелі болса, онда жанама үдеу жылдамдықпен бірдей бір жаққа қарай бағытталады, ал ол кемімелі болған жағдайда жанама үдеу жылдамдыққа қарама-қарсы жаққа қарай бағытталады. Ендігі жерде айналмалы қозғалыстағы *M* нүктесінің толық үдеуі $\bar{a}$-векторын құраушылары $\bar{a}_\tau$ және $\bar{a}_n$ арқылы анықтау мына формулалар арқылы жүргізіледі:

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}, \qquad (2.81)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.82)$$

Егер $\bar{r}$ векторының модулі $|\bar{r}|$=const болып, оның бағыты ғана уақыт өсуіне қарай өзгеретін болса, онда (2.78)-формуладан мынадай теңдік алынады:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.83)$$

Бұл теңдіктегі $\bar{\omega}$ радиус-вектор $\bar{r}$-дің бұрылуының бұрыштық жылдамдығы. Енді (2.83) теңдігінің екі жағынан уақыт бойынша туынды алайық:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (2.84)$$

(2.84)–теңдіктің оң жағындағы қосылғыш векторларды жеке-жеке қарастырайық. Ондағы бірінші қосылғыш вектор модулі *M*-нүктесінің жанама үдеуіне тең:

$$\left|\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}\right| = \left|\bar{\xi} \times \bar{r}\right| = \left|\xi r \sin(\bar{\xi}, \bar{r})\right| = \xi h = a_\tau. \qquad (2.85)$$

(2.85)–тің оң жағындағы бірінші вектор, *M*-нүктесіндегі жылдамдық векторы $\bar{v}$ мен бағыттас. Демек, бұдан:

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r}=\overline{\xi}\times\overline{r}=\overline{a}_{\tau}. \qquad (2.86)$$

Ал енді ондағы екінші қосылғыш вектордың модулі:

$$\left|\overline{\omega}\times\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right|=\left|\overline{\omega}\times\overline{v}\right|=\left|\omega\times v\right|=\omega^{2}\times h=a_{n}. \qquad (2.87)$$

Бұл вектор MO_1 түзуінің бойымен O_1 центріне қарай, айналу өсіне перпендикуляр бағытталады. Демек

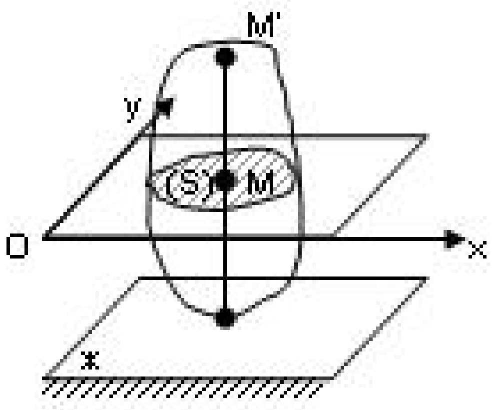
$$\overline{\omega}\times\frac{d\overline{r}}{dt}=\overline{\omega}\times\overline{v}=\overline{a}_{n}. \qquad (2.88)$$

Сонымен (2.80) – (2.82) формулаларын векторлық тәсілді қолданып та алуға болатынын көрсеттік.

2.3. Қатты дененің жазық параллель қозғалысы

2.3.1. Қатты дененің жазық параллель қозғалысының заңы, оның анықталу тәсілдері

Егер қатты дененің барлық нүктелері қандайда бір қозғалмайтын жазықтыққа параллель қозғалатын болса, онда дененің мұндай қозғалысын жазық – параллель қозғалыс дейміз (2.20-сурет). Қозғалмайтын жазықтықты (*ж*)-деп белгілейік. Дененің О нүктесі арқылы (*ж*) жазықтығына параллель етіп (ж) жазықтығы дененің (*S*) қимасын береді.



2.20-сурет

Бұл *(S)* – қиманың барлық нүктелерінің негізгі *(ж)* – жазықтығынан қашықтықтары қозғалыс кезінде өзгермейді, тұрақты болады. Демек, *(S)* –қимасы үнемі *(ж)* – жазықтығында жатады және ол өзінің пішінін өзгертпейді.

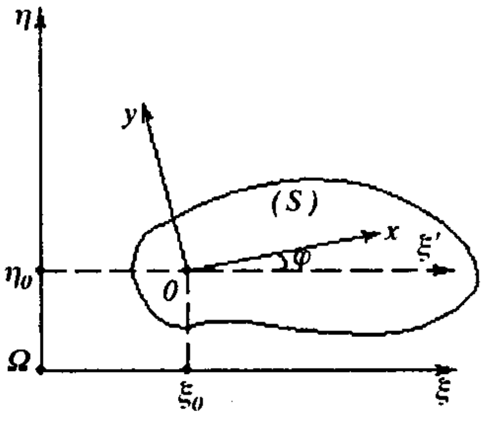
Сөйтіп қатты дененің жазық – параллель қозғалысын зерттеу оның қозғалмайтын жазықтыққа параллель қималарының бірінің, мысалы *(S)* –тің, жататын *(ж)* – жазықтықтың бетімен қозғалуын зерттеуге келтіріледі. Қозғалмайтын $\Omega\xi\eta\zeta$ және жазық фигура *(S)* –ке қатаң бекітілген *Oxyz* координаттар жүйелерін таңдап алайық (2.21-сурет).

Қозғалмалы *Oxyz* координаттар жүйесінің бас нүктесі *O*-ны бұдан былай “полюс”-дейміз.

Полюс *O*-ның өстеріне қатысты координаттарын ξ_0 және η_0 деп белгілейік. Сонда, мына теңдеулер

$$\xi_0=\xi_0(t),\quad \eta_0=\eta_0(t),\quad \varphi=\varphi(t) \qquad (2.89)$$

Жазық фигураның қозғалмайтын $\Omega\xi\eta$ координаттар жазықтығындағы қозғалысын анықтайды. Демек, бұлар жазық фигураның өз жазықтығындағы қозғалысының, күрделі қозғалыс екенін көрсетеді. Оны негізгі екі құрауышы қозғалысқа жіктеуге болады. Олардың біреуі, жылдамдығы полюс жылдамдығына тең, ілгерілемелі қозғалыс, ал екіншісі, қозғалмайтын центр ретінде қарастырылатын полюс О арқылы өтіп, жазық фигура жазықтығына перпендикуляр орналасатын лездік өс жанындағы, лездік айналыс.



2.21-сурет

2.3.2. Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене (жазық фигураның) нүктелерінің жылдамдықтары

Полюс ретінде алынған нүктені O-деп белгілейік (2.23-сурет). Мұндағы $\bar{\rho} = \overline{\Omega M}$, $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{\rho}_0 == \overline{\Omega O}$.

Бұл үш вектор қозғалыстың кез келген мезгілінде мынадай векторлық теңдікті қанағаттандырып отырады:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r} \tag{2.90}$$

(2.90)- теңдіктің екі жағында да дифференциалдасақ, мынадай теңдік аламыз :

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}, \tag{2.91}$$

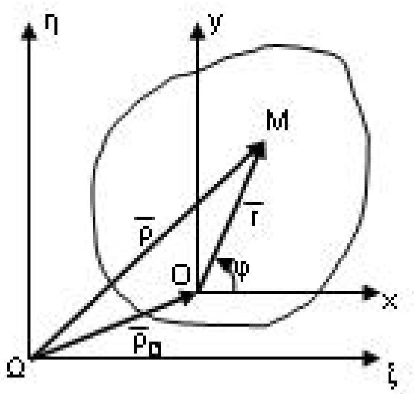
мұндағы

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_M, \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} = \bar{v}_0. \tag{2.92}$$

Ал (2.91) теңдігінің оң жағындағы екінші қосылғыш вектор, қозғалысы қарастырылып отырған, M нүктесінің қозғалмалы Oxy жүйесіне қатысты жылдамдығын өрнектейді. Бұл жылдамдық векторын $\bar{v}_{MO}$ -деп белгілейміз. Оқығанда оны M нүктесінің полюс O-ға қатысты алынған жылдамдығы деп атаймыз. Осы белгілеулер арқылы (2.91) –теңдікті мына түрде жазайық:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{v}_{M_0}. \tag{2.93}$$

(2.93) өрнегіндегі $\bar{v}_{MO}$ -жылдамдық векторын анықтай түсейік. $\bar{r}=\overline{OM}$ векторының модулі $|\bar{r}|$ = const, ал тек фигурамен бірге *O*-ны айналады. Бұл айналу φ бұрышымен анықталады. Айналыс бұрышы φ-дің бірлік уақытағы өзгеру тездігі:



2.23-сурет

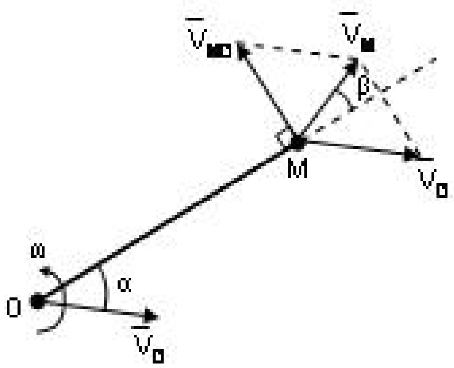
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.94)$$

Модулін өзгертпей сақтай отырып, бір центрден (полюстен) айналатын $\bar{r}$ векторының туындысын есептеу, Эйлер формуласы арқылы орындалады:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.95)$$

(2.94), (2.95) формуларын еске ала отырып, $d\bar{r}/dt$ туындысын өрнектейтін формуланы да табамыз:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{M_O} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.96)$$



2.24-сурет

$\bar{v}_{MO}$ векторы *(S)* –тің *O* полюстен $\bar{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналуынан туындайтын болғандықтан:

$$\bar{v}_{M_O} \perp OM.$$

$\bar{\omega}$-бұрыштық жылдамдық векторы *Oz*-өсі бойымен оң бұранда ережесіне сәйкес бағытталады. Демек:

$$\bar{\omega} \perp \bar{r} \text{ немесе } \bar{\omega} \perp \overline{OM}.$$

(2.96) –теңдігінің екі жағынан да модуль алсақ, онда мына формула шығады:

$$v_{MO} = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| = \omega \cdot OM. \qquad (2.97)$$

(2.96) –теңдікті (2.93) – теңдіктегі орнына қойсақ:

$$\bar{v}_{M_O} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.98)$$

(2.93) не (2.97) формуласын теорема түрінде айтуға болады. Оны 1-ші теорема деп атайық.

1 теорема. *Жазық фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен осы нүктенің полюске қатысты алынған жылдамдығының геометриялық қосындысына тең.*

Бұл теорема (2.93) немесе (2.98) формуламен өрнектеледі.

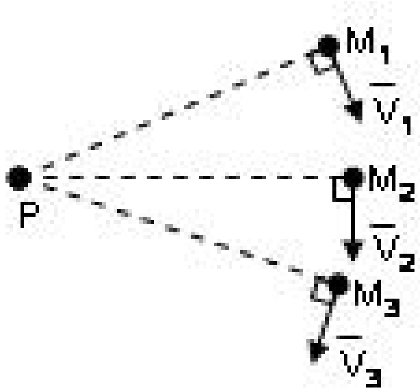
Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын есептеуге қолданылатын екінші теореманы (2.93) теңдіктен оңай алуға болады. Оның екі жағында *OM* бағытына проекциялаймыз. Сонда:

$$\bar{v}_M \cos\beta = \bar{v}_0 \cos\alpha \, . \qquad (2.99)$$

2 теорема. *Жазық фигураның кез келген екі нүктесінің жылдамдықтарының осы нүктелер арқылы жүргізілген түзу бағытындағы проекциялары тең болады.*

2.3.3. Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану арқылы есептеу

Жылдамдықтардың лездік центрі деп, берілген лездік уақыт t мезгілінде, жылдамдығы нөлге тең болатын жазық фигура жазықтығының бір нүктесін айтамыз.

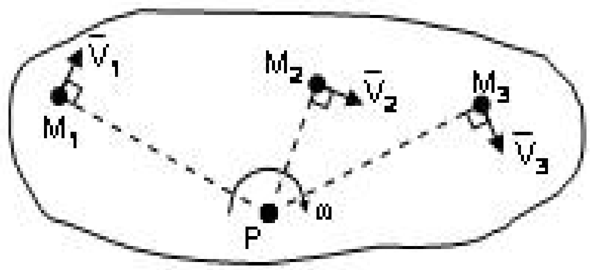


2.25-сурет

Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын анықтаудың геометриялық әдісінің бір түрі, осы жазық фигураның лездік центрін пайдалануға негізделген. Оны мына теорема арқылы айтуға болады.

3-ші теорема. *Егер жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жылдамдығы берілсе және оның екінші бір нүктесінің жылдамдығының бағыты ғана белгілі болса, онда бұл фигура жазықтығының кез келген нүктелерінің жылдамдықтарын, жылдамдықтардың лездік центрі арқылы табуға болады.*

Жазық фигура *(S)* –тің бір нүктесі M_1 – дің жылдамдық векторы $\bar{v}_1$ берілсін және оның екінші бір нүктесі M_2 – нің жылдамдық векторы жататын түзу бағыты белгілі болсын дейік (2.26-сурет).



2.26-сурет

M_1 жене M_2 нүктелерінің жылдамдықтарының берілген бағыттары арқылы лездік центр *P*-ның орнын табамыз.

Олардың жылдамдықтары лездік радиустар PM_1, PM_2, PM_3 ұзындықтарына пропорционал болып келеді:

$$v_1 = \omega \cdot PM_1, \qquad v_2 = \omega \cdot PM_2,$$

$$v_3 = \omega \cdot PM_3$$

мұндағы ω жазық фигураның *P* центрді айналысының лездік бұрыштық жылдамдығы. Оны соңғы үш теңдіктердің біріншісінен табамыз.

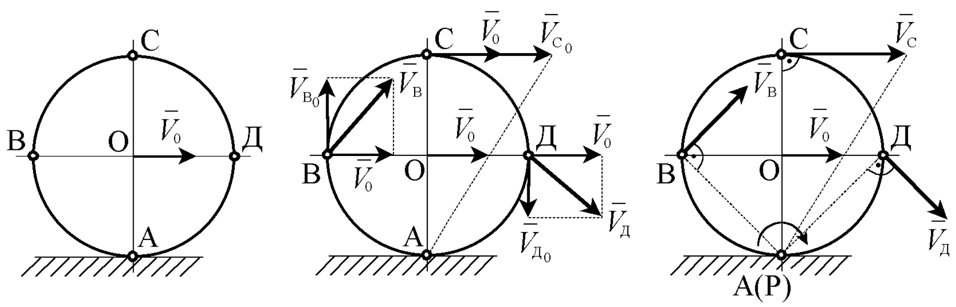
$$\omega = \frac{v_1}{PM_1}$$

Осыдан қалған екі теңдіктердегі орнына қойсақ

$$v_2 = v_1 \frac{PM_2}{PM_1}, \quad v_3 = v_1 \frac{PM_3}{PM_1}.$$

Мысал: Радиусы R = 0.5м түзу рельс бойымен сырғанамай дөңгелеп қозғалады; оның центінің жылдамдығы тұрақты және v_0 = 10 м/с-ке тең.

Дөңгелектің горизонталь және вертикаль диаметрлерінің соңғы A, B, C, D нүктелерінің жылдамдықтарын және бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.



1.27-сурет

Шешуі: I-тәсіл: (жылдамдықтардың таралу формулаларын пайдалану).

Полюс ретінде O центрін қабылдаймыз (1.27-сурет). Онда дөңгелектің кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен полюсті айнала қозғалыс жылдамдығының геометриялық қосындысына тең, мысалы $\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$. Дөңгелек сырғанамай дөңгелеп қозғалатын болғандықтан дөңгелек пен рельстің жанасушы A нүктесінің жылдамдығы нөлге тең $v_A = 0$, яғни A нүктесі лездік жылдамдық центрі болып табылады. Бұл нүктеде полюсті айнала қозғалыс жылдамдығы $\bar{v}_{AO}$ −мен полюс жылдамдығы $\bar{v}_O$ −ның шамалары тең, ал бағыттары қарама-қарсы, яғни $\bar{v}_{AO} = -\bar{v}_O$. A, B, C, D нүктелерінен полюске дейінгі ара қашықтықтары тең. Сондықтан, нүктелердің полюсті айнала қозғалыс жылдамдықтары өз-ара тең, яғни $v_{BO} = v_{CO} = v_{DO} = v_{AO} = v_O$.

Әрбір нүктеден полюс жылдамдығы $\bar{v}_O$ −ны және дөңгелектің радиусына перпендикуляр полюсті айнала қозғалыс жылдамдығын тұрғызып табатынымыз:

$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = 14{,}14\, м/с, \quad v_C = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = 20\, м/с,$$

$$v_D = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = 14{,}14\, м/с.$$

Бұрыштық жылдамдығы:

$$\omega = \frac{v_{BO}}{R} = \frac{v_O}{R} = 20\, рад/с.$$

II-тәсіл: (жылдамдықтар лездік центрін пайдалану):

Дөңгелектің жылдамдықтар лездік центрі A–ны полюс ретінде қабылдаймыз. Онда дөңгелектің барлық нүктелерінің жылдамдықтары жылдамдықтар лездік центрін айнала қозғалыс жылдамдықтары болады. Барлық нүктелердің жылдамдықтарының шамалары мынадай қатынастармен анықталады:

$$v_C = v_O \frac{PC}{PO} = 20\, м/с\,,\ v_B = v_O \frac{PB}{PO} = 14{,}14\, м/с\,,$$

$$v_D = v_O \frac{PD}{PO} = 14{,}14\, м/с\,,$$

мұндағы $PC = 2R, PB = PD = \sqrt{2}R$.

Бұрыштық жылдамдығы мынадай қатынаспен анықталады:

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R} = 20\, рад/с\,.$$

2.3.4. Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері

Жазық фигураның кез келген бір нүктесі M-нің қозғалмайтын $\Omega\xi\eta$ жүйесіне қарағандағы үдеуін есептеу керек. Осы нүктенің жылдамдығы өрнектейтін формуланы алайық:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}\,. \qquad (2.100)$$

Қарастырылып отырған нүктенің абсолют үдеуі, оның абсолют туындыға тең:

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\,. \qquad (2.101)$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы әрбір қосылғышқа және жеке тоқтап өтейік:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\xi}\,, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}\,. \qquad (2.102)$$

Осыған орай (2.101) – теңдікті жаңа түрде қайталап жазып шығамыз:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\xi} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}\,. \qquad (2.103)$$

(2.103)-тің оң жағындағы соңғы қосылғышты екі рет қайталанған векторлық көбейтіндіні таратып жазу арқылы ықшамдайық:

$$\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega}(\bar{\omega} \times \bar{r}) - \bar{r}\omega^2 = -\omega^2 r\,. \qquad (2.104)$$

Бұл арада $\bar{\omega} \perp \bar{r}$ екенін ескердік. (2.104) теңдікті (2.103) -гі орнына қойып, іздеп отырған формуланы аламыз:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\xi} \times \bar{r} - \omega^2 \times r^2\,. \qquad (2.105)$$

Екінші және үшінші қосылғыштардың геометриялық қосындысына тең векторды $\bar{a}_{MO}$-деп белгілейік:

$$\bar{a}_{M_O} = \bar{\xi} \times \bar{r} - \omega^2 \times r\,. \qquad (2.106)$$

(2.106) -өрнекті (2.105) –формуладағы орнына қойсақ, оны ықшамдалған түрге келтіреміз:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_0 + \overline{a}_{M_O}. \qquad (2.107)$$

(2.94) –формуланы теорема түрінде айталық.

Теорема: *жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жазық қозғалыс кезіндегі толық үдеуі полюс үдеуіне бұл нүктенің полюске қатысты алынған үдеуін геометриялық түрде қосқанға тең.*